ЛА 11.12.12

$f: V_1 \to V_2$ $f$ е линейно изображение

$e_1 - e_k$ – базис на $V_1$

$f_1 - f_n$ – базис на $V_2$

$$f(e_1) = \lambda_{11} f_1 + \lambda_{21} f_2 + \dots + \lambda_{n1} f_n$$
$$f(e_2) = \lambda_{12} f_1 + \lambda_{22} f_2 + \dots + \lambda_{n2} f_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_k) = \lambda_{1k} f_1 + \dots + \lambda_{nk} f_n$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & & \lambda_{nk} \end{pmatrix}$$

$d_1, d_2 \dots d_n$ е друг базис на $V_2$

$$d_1 = \mu_{11} f_1 + \dots + \mu_{1n} f_n$$
$$\vdots$$
$$d_n = \mu_{n1} f_1 + \dots + \mu_{nn} f_n$$

тогава

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & d_n \\ \mu_{11} & \dots & \mu_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{1n} & \dots & \mu_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицата на смяната на базиса на $V_2$ от базиса $f_1 - f_n$ към базис $d_1 - d_n$

D.A матрицата на $f$ спрямо базис $e_1 - e_k$ на $V_1$ и базис $d_1 - d_n$ на $V_2$

$b_1 - b_k$ е базис на

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & b_k \\ \beta_{11} & \dots & \beta_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1k} & \dots & \beta_{kk} \end{pmatrix}$$

$AB$ – матрицата на изображението спрямо базиса $b_1 - b_k$ на $V_1$ и базиса $f_1 - f_n$ на $V_2$

ДАВ - матрицата на $f$ спрямо базиса $b_1 - b_n$ на $V_1$ и $d_1 - d_m$ на $V_2$

Нека $f \in \text{Hom}\, V$ и $e_1 - e_n$ е базис на $V$ и $f_1 - f_n$ е друг базис на $V$

Матрицата на $f$ спрямо базис $f_1 - f_n$ матрица на прехода от $f$ към $e$

$A_{f \to e}$ $A_e$ $A_{e \to f}$

$A_{f \to e}^{-1} = A_{e \to f}$

Ако $V = (v_1 - v_n) \Rightarrow f(v) = A_e \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

за да намерим образите

**515** $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

$b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $b_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $b_3 = e_1 + 3e_2 + e_3$

$f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$

$f$ ще е ЛО $\Leftrightarrow a_1 a_2 a_3$ образуват базис на $V$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{образуват базис} \Rightarrow \dim V = 3$$
$$\Rightarrow \text{ЛО } f \text{ е единствена}$$

$f(a_1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$

$f(a_2) = f(e_1) + 2f(e_2) + 2f(e_3) = b_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$

$f(a_3) = f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = b_3 = e_1 + 3e_2 + e_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & f(e_1) \\ 1 & 2 & 2 & f(e_2) \\ 1 & 2 & 3 & f(e_3) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} e_1 & 2e_2 & e_3 \\ 2e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 3e_2 & e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&2&1\\ 1&2&2&2&1&1\\ 1&2&3&1&3&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&2&1\\ 0&1&1&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&3&1\\ 0&1&0&2&-3&0\\ 0&0&1&-1&2&0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(e_1)\\ f(e_2)\\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0e_1+3e_2+e_3\\ 2e_1-3e_2+0e_3\\ -e_1+2e_2+0e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$f(e_1) = 3e_2 + e_3$; $f(e_2) = 2e_1 - 3e_2$; $f(e_3) = -e_1 + 2e_2$

$$A_e = \begin{pmatrix} 0&2&-1\\ 3&-3&2\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$$ от матрицата горе само се транспонирана

$A_f = A_{f\to e}\, A_e\, A_{e\to f} = A_{e\to f}^{-1} A_e A_{e\to f}$

$A_{e\to f} A_f = A_e A_{e\to f}$

$$A_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$$

от $f_1 f_2 f_3$ по стълбове

$A_{e\to f} X = A_e A_{e\to f}$

$$A_e A_{e\to f} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&2&-1&1&1&1\\ 3&-3&2&-1&0&1\\ 1&0&0&1&1&2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 3&-1&-4\\ 8&5&10\\ 1&1&1 \end{array}\right) = A_e A_{e\to f}$$

заместване от $X$

$A_{e\to f} A_f = A_e A_{e\to f}$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1\\ -1&0&1\\ 1&1&2 \end{pmatrix} A_f = \begin{pmatrix} -3&-1&-4\\ 8&5&10\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&-3&-1&-4\\ -1&0&1&8&5&10\\ 1&1&2&1&1&1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&-3&-1&-4\\ 0&1&0&5&4&6\\ 0&0&1&4&2&5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-12&-7&-15\\ 0&1&0&5&4&6\\ 0&0&1&4&2&5 \end{array}\right) \Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} -12&-7&-15\\ 5&4&6\\ 4&2&5 \end{pmatrix}$$

$$A_f = A_{\varphi \to e}\, A_e\, A_{e \to f} = A^{-1}_{e \to f}\, A_e\, A_{e \to f} \quad / \cdot A_{e \to f}$$

$$A_{e \to f}\, A_\varphi = A_e\, A_{e \to f}$$

5.16. $e_1 e_2 e_3 e_4$ са базис на $V$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ има матрица

а) $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ б) $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Намерете базис на ЛП-та $\ker \varphi$, $\mathrm{Im}\, \varphi$, $\ker \varphi \cap \mathrm{Im}\, \varphi$ и $\ker \varphi + \mathrm{Im}\, \varphi$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ . $\ker \varphi = \{ v / v \in V_1,\ \varphi(v) = 0 \}$

$\mathrm{Im}\, \varphi = \{ b / b \in V_2,\ \exists a \in V_1,\ \varphi(a) = b \}$

$v \in V$ , $v \in \ker \varphi \Rightarrow A v^T = 0$

$$\begin{matrix} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \varphi(e_4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -v_1 - 2v_2 - 3v_3 - 2v_4 = 0 \\ \qquad\qquad v_3 + v_4 = 0 \\ v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 - 2v_3 - v_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Намираме ФСР}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

полагаме $x_2 = p$, $x_4 = q$

$x_3 = -q$,

$x_1 = -2p + q$

$$\text{ФСР} - \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (q-2p, & p, & -q, & q) \end{matrix}$$

$a_1 = (-2, 1, 0, 0)$ при $p=1, q=0$

$a_2 = (1, 0, -1, 1)$ при $p=0, q=1$

базис на $\ker f$

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4 \xrightarrow{f} v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + v_3 f(e_3) + v_4 f(e_4)$$

$$b \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_4 e_4$$
$$f(a) \quad b \Rightarrow b = a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \dots + a_4 f(e_4)$$

$\operatorname{Im} f = \ell(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$

изображението е равно на линейната обвивка

$f(e_1) =$ I стълб на Ае, $f(e_2) =$ II стълб на Ае

$f(e_3) =$ III стълб на Ае, $f(e_4) =$ IV стълб на Ае

образуваме матрицата с редове

$B = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b_1 (-1, 0, 1, -1)$ } базис на $\operatorname{Im} f$

$b_2 (-2, 1, 1, -1)$ }

$\ker f = \ell(a_1, a_2)$

$\operatorname{Im} f = \ell(b_1, b_2)$

$\ker f + \operatorname{Im} f = \ell(a_1, a_2, b_1, b_2]$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ базис на $\ker \ell + \operatorname{Im} \ell$

образуване ХСН с вектори $b_1, b_2$

$$\left| \begin{matrix} -x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$ Намиране ФСР

полагаме $x_1 = p$, $x_3 = q \Rightarrow x_4 = q - p$, $x_2 = 4p - q$

ФСР $(p, 4p-q, q, q-p)$

$d_1 = (1, 4, 0, -1)$ при $p = 1, q = 0$

$d_2 = (0, -1, 1, 1)$ при $p = 0, q = 1$

$$\operatorname{Im} \ell \quad \left| \begin{matrix} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right.$$

$$\ker \ell \cap \operatorname{Im} \ell : \quad \left| \begin{matrix} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right.$$

$$\ker \ell \quad \left| \begin{matrix} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$ от началната система

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ образуване базис на $\ker \ell \cap \operatorname{Im} \ell$

Нека $F$ е числово поле
$V$ е ЛП над $F$, Нека $A \in M_{n\times n}$

$f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
характеристичен полином на матрицата $A$
корените на $f$ наричаме характеристични
корени на $A$

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$
Векторът $v \in V$ наричаме собствен вектор на
$\varphi$ ако
1) $v \neq \mathcal{O}$
2) $\exists \lambda \in F$ т.че $\varphi(v) = \lambda v$
$\lambda$ наричаме собствена стойност на $\varphi$
съответстваща на $V$

Едно число $\lambda \in F$ е собствена стойност
на $\varphi \iff \exists v \in V$, $\varphi(v) = \lambda v$
$v = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$A$ е матрицата на ЛО $\varphi \Rightarrow \varphi(v) = A_v^T$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

$(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ е ненулева n-орка, която е решение на ХСЛУ $(*) \iff$
$\det(A) = 0 \iff \lambda$ е корен на характеристичния полином на $A$

Да се намерят характеристичните корени на матрицата

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $\quad f_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0-\lambda & a \\ -a & 0-\lambda \end{pmatrix}$

$$f(x) = \lambda^2 + a^2 \; ; \; \lambda^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm ia$$

б) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad f_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\alpha-\lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{pmatrix}$

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$
$$\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

$$f(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\sin\alpha}$$

6,8 Да се намерят собствените вектори и собствените стойности на ЛОф които в дадем базис има матрица

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad f_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda+3) = (1-\lambda)(2-\lambda) \Rightarrow$

$\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = 2$ са собствените стойности на ЛОф

v е собствен вектор $\Rightarrow$

$\left| \begin{array}{l} (4-\lambda)v_1 - 2v_2 = 0 \\ 3v_1 + (-1-\lambda)v_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ при $\lambda_1 = 1$ собствените вектори съответстват на системата

$\left| \begin{array}{l} 3v_1 - 2v_2 = 0 \\ 3v_1 - 2v_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ полагаме $v_2 = p \Rightarrow v_1 = \frac{2p}{3}$

$a_1 = (2\,3)$ е ФСР $\Rightarrow$

Всички собствени вектори съответстващи на $\lambda = 1$ имат вида $M_1 a_1$

при $\lambda_2 = 2$

$\left| \begin{array}{l} 2v_1 - 2v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{array} \right.$

полагаме $v_2 = p \Rightarrow v_1 = p$

$\Rightarrow a_2(1\,1) \Rightarrow$ Всички собствени вектори съответстващи на $\lambda_2 = 2$ имат вида $M_2 a_2$

$a_1 a_2$ образуват на ЛП матрицата на прехода от дадения базис в базиса $a_1 a_2$ и има вида $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и стрелко

$a_1 \quad a_2$

този базис $a_1 a_2$, матрицата на ЛО $\varphi$ е диагонална и има вида

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Нека $e_1 e_2 e_3$ е базис на $V$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$.
Да се намери базис на $V$, в който $\varphi$ има диагонална матрица $D$, и ако $\varphi$ действа по правилото

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (4\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) e_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) e_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) e_3$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 4e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \varphi(e_2) &= -e_1 + e_2 - e_3 \\ \varphi(e_3) &= -2e_1 - 2e_2 + e_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{матрицата на } \varphi \text{ спрямо } e_1 e_2 e_3 \text{ има вида}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{matrix}$$

Намираме СС на $A$ $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -2(2-\lambda) \\ 0 & 3-\lambda & -2-(1-\lambda)(4-\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -2(2-\lambda) \\ 0 & 0 & (-2-\lambda^2+3\lambda) \end{vmatrix}$$

$$-(3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$$

при $\lambda = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$ полагаме $x_3 = p$, $x_2 = p$, $x_1 = p$

$\Rightarrow a_1 = (1,1,1)$ и всеки вектор съответстващ на $\lambda = 1$ има вида $\gamma_1 a_1$

при $\lambda = 2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

полагаме $x_1 = 0$, $x_3 = p \Rightarrow x_2 = -2p$

Всички вектори на $\lambda = 2$ имат вида $\gamma_2 a_2$

$a_2 = (0, -2, 1)$

при $\lambda = 3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = x_1 = p$$

$a_3(1\,1\,0)$, всеки собствен вектор съответстващ на $\lambda_3 = 3$ има вида $\gamma_3 a_3$

$a_1 a_2 a_3$ съответстват на различни собствени стойности $\Rightarrow$ ЛНЗ-ни и образуват базис на ЛПУ

Спрямо този базис ЛОП има матрица $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. матрицата на прехода е

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} A_e T = D$$